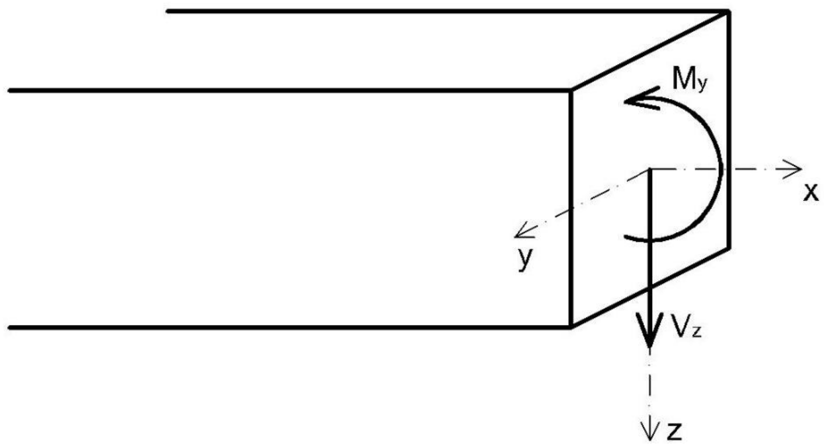
Ohýbaný nosník - napětí

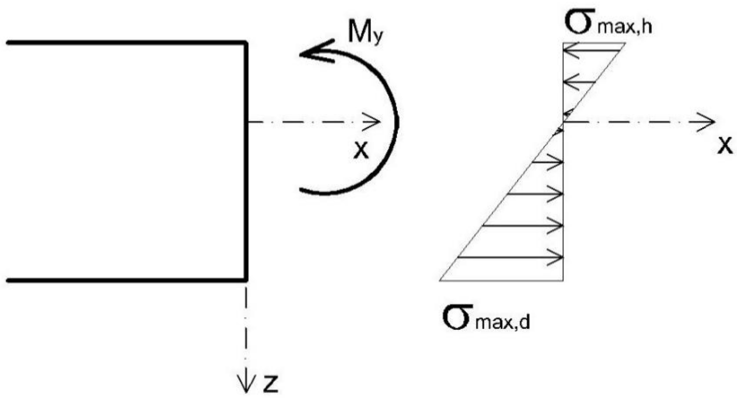
Prostý ohyb, rovinný ohyb

Při prostém ohybu je průřez namáhán ohybovým momentem otáčejícím kolem jedné z hlavních os setrvačnosti průřezu, obvykle osy *y*. Moment se značí M_y nebo jenom *M*. Běžněji je možné se setkat s ohybovým momentem v kombinaci s posouvající silou ve směru druhé z hlavních os setrvačnosti, označovanou V_z nebo jenom *V*. V tomto případě hovoříme o rovinném ohybu.



Normálové napětí

Ohybový moment způsobuje normálové deformace průřezu ε_x a normálové napětí σ_x. Na základě Bernoulli-Navierovy hypotézy o zachování rovinnosti průřezů po deformaci, se předpokládá lineární rozložení těchto veličin po výšce průřezu.



Průběh napětí po průřezu v závislosti na souřadnici *z* je dán rovnicí

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y}$$

kde

I_y je moment setrvačnosti průřezu

z je z-ová souřadnice bodu v průřezu

M_y je ohybový moment

Extrémní normálová napětí

Souřadnice z je v čitateli vzorce pro normálové napětí, největší moment je pro největší hodnotu z, tedy v krajních vláknech. Moment setrvačnosti I_y je obvykle konstantní pro celý nosník, maximální souřadnice z je obvykle konstantní pro celý nosník. Moment M_y je proměnný po délce nosníku. Protože je v čitateli, extrém normálového napětí, bude v místě největšího ohybového momentu.

Pokud se nerozlišuje o jaký extrém se má jednat (tah, tlak) vznikne tento extrém ve vzdálenějších vláknech od těžiště a v místě největšího ohybového momentu v absolutní hodnotě.

Pokud se hledá například největší tahová napětí a průřez je nesymetrický, je třeba srovnat napětí v horních vláknech v místě největšího záporného momentu s napětím v dolních krajních vláknech v místě největšího kladného momentu. Obdobnou úvahu je třeba provést pro největší tlaková napětí.

Smyková napětí v masivním průřezu

U masivních průřezů se obvykle zabýváme jenom napětím ve směru posouvající síly, tedy napětím τ_{xz}. Ve směru kolmém předpokládáme konstantní rozdělení tohoto napětí.

Velikost smykového napětí se určí ze vztahu

$$\tau_{zx} = \frac{V_z \overline{S_y}}{I_y b}$$

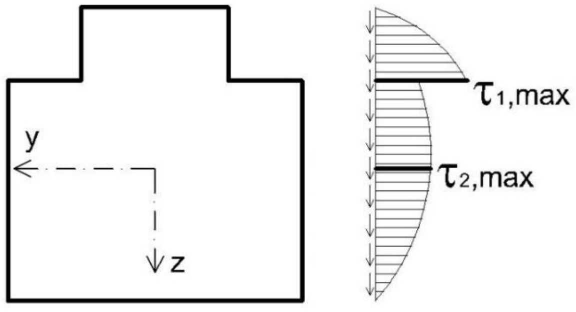
kde

V_z je posouvající síla
$\overline{S_y}$ je statický moment plochy dolní části průřezu odříznuté myšleným řezem
I_y je moment setrvačnosti průřezu
b je šířka průřezu v místě v místě řezu

Průběhy smykových napětí po masivním průřezu

Moment setrvačnosti I_y konstantní pro každý řez na průřezu a obvykle i po délce nosníku. V_z je konstantní pro daný průřez a $\overline{S_y}$ a b se mění po výšce průřezu. Pro krajní vlákna je statický moment plochy $\overline{S_y}$ nulový a tedy i smyková napětí jsou v krajních vláknech nulová. Pro obdélníkové části je šířka b konstantní. Statický moment odříznuté části je parabolou druhého stupně, neboť je součinem lineárně měnícího se plochy a lineárně měnícího se ramene po výšce. Z toho plyne, že i průběh smykových napětí bude po výšce částí průřezu parabolou druhého stupně.

Extrémní napětí nastává v místě maximálního statického momentu plochy $\overline{S_y}$, tedy v těžišti celého průřezu, popřípadě na rozhraní různých šířek průřezu (v užší části). Směr toku smykových napětí odpovídá směru působení posouvající síly na průřez.



Smyková napětí v tenkostěnném průřezu

Pro tenkostěnné průřezy se uvažuje konstantní rozložení smykového napětí po tloušťce jednotlivých částí průřezu. Směr napětí odpovídá směru os jednotlivých částí

$$\tau = \frac{V_z \overline{S_y}}{I_y t}$$

kde

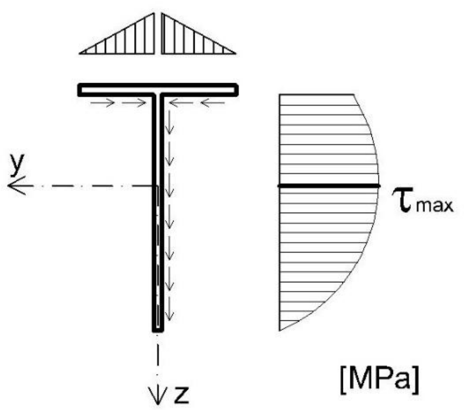
V_z	je posouvající síla
$\overline{S_y}$	je statický moment plochy dolní části průřezu odříznuté myšleným řezem vedeným ve směru tloušťky dané části
I_y	je moment setrvačnosti průřezu
t	je tloušťka části v místě řezu

Průběhy smykových napětí po tenkostěnném průřezu

Moment setrvačnosti I_y konstantní pro každý řez na průřezu a obvykle i po délce nosníku. V_z je konstantní pro daný průřez. Tloušťka t je obvykle konstantní pro každou část průřezu. Statický moment odříznuté části $\overline{S_y}$ se mění se změnou polohy řezu. Pro krajní vlákna je statický moment plochy $\overline{S_y}$ nulový a tedy i smyková napětí jsou v krajních vláknech nulová.

Pro obdélníkové části je šířka t konstantní. Pro svislé obdélníkové části je statický moment odříznuté části parabolou druhého stupně, neboť je součinem lineárně měnícího se plochy a lineárně měnícího se ramene. Pro vodorovné obdélníkové části je statický moment odříznuté části lineární, neboť je součinem lineárně měnící se plochy a konstantního ramene. Z toho plyne, že i průběh smykových napětí bude ve svislém směru parabolou a ve vodorovném směru lineární.

Extrémní napětí nastává v místě maximálního statického momentu plochy $\overline{S_y}$, tedy v těžišti celého průřezu, popřípadě na rozhraní různých tlouštěk průřezu (v užší části).

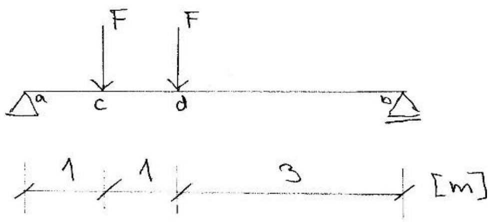


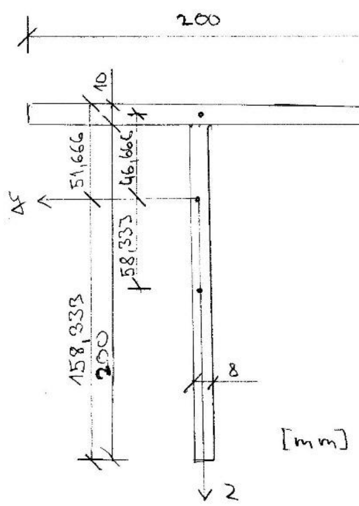
Příklad

Zadání:

Prostý nosník je zatížený dvěma silami F stejné velikosti dle obrázku. Průřez nosníku tvoří tenkostěnný jednoose symetrický T profil dle obrázku. Moment setrvačnosti průřezu je $I_y = 15{,}15 \cdot 10^6 m^4$. Výpočtová pevnost materiálu nosníku v tahu i tlaku je $f_d = 210 MPa$. Určete maximální velikost sil F tak, aby normálové napětí σ_x nepřekročilo pevnost f_d .

Pro největší ohybový moment a největší posouvající sílu vykreslete průběh napětí po průřezu.





Řešení:

Ze statického schématu nosníku určíme největší ohybový moment nosníku pro neznámou velikost síly F. Z rozměrů průřezu a pevnosti materiálu určíme moment únosnosti. Srovnáním těchto dvou momentů získáme neznámou hodnotu síly F.

Zpětným dosazením hodnoty F do průběhů vnitřních sil získáme maximální hodnoty M a V a pro ně napočítáme hodnoty normálových a smykových napětí v důležitých bodech průřezu a vykreslíme průběhy.

a) Stanovení reakcí, průběhu posouvajících sil a ohybových momentů

Výpočet provedeme obvyklým způsobem s využitím podmínek rovnováhy na celé konstrukci i jejích oddělených částech a diferenciálních podmínek rovnováhy. Všechny veličiny vyjadřujeme v závislosti na neznámé hodnotě F.

Z momentové podmínky k bodu b:

$$R_a = \frac{3F + 4F}{5} = \frac{7}{5} F$$

Z momentové podmínky k bodu a:

$$R_b = \frac{F + 2F}{5} = \frac{3}{5}F$$

Vhledem k absenci spojitého příčného zatížení q bude průběh posouvajících sil po částech konstantní

V úseku a-c:

$$V_a = R_a = \frac{7}{5}F$$

V úseku c-d:

$$V_{c,p} = R_a - F = \frac{2}{5}F$$

V úseku d-b:

$$V_b = -R_b = -\frac{3}{5}F$$

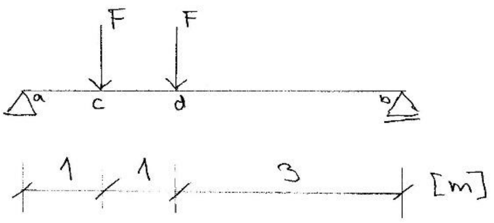
Průběh ohybových momentů bude vzhledem k po částech konstantní posouvající síle po částech lineární. V kloubových podporách a a b je roven nule, napočítáme jej tedy pro body c a d:

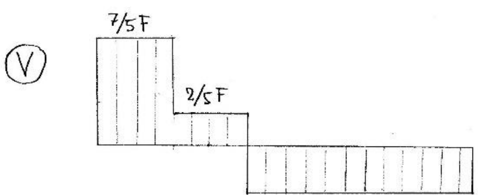
$$M_c = 1 \cdot R_a = \frac{7}{5}F$$

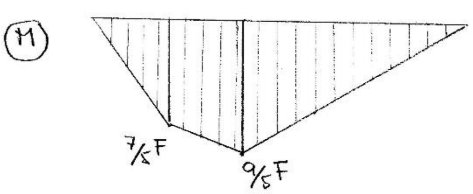
$$M_d = 3 \cdot R_b = \frac{9}{5}F$$

Z průběhu ohybových momentů je zřejmé, že největší moment nastane v bodě d, tedy v místě, kde posouvající síla prochází přes nulovou hodnotu.

$$M_{max} = M_d = \frac{9}{5}F$$







b) Určení únosnosti průřezu

Chceme vyjádřit největší ohybový moment, který je průřez nosníku schopen přenést. Ten získáme, pokud v místě s největším normálovým napětím v průřezu bude dosaženo pevnosti materiálu. Pro namáhání ohybem se předpokládá lineární rozložení napětí po výšce průřezu s nulovou hodnotou v těžišti a extrémními hodnotami v krajních vláknech. Vzhledem k tomu, že v našem případě nerozlišujeme tahové a tlakové namáhání, extrémní napětí nastane v nejvzdálenějším vlákně od těžiště průřezu, tedy na dolním okraji průřezu. Za souřadnici *z* budeme tedy uvažovat souřadnici dolních vláken.

Napětí se určí ze vztahu:

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y}$$

Ten si upravíme na vyjádření ohybového momentu:

$$M_y = \frac{\sigma I_y}{z}$$

Za napětí σ dosadíme pevnost f_d a dostaneme vyjádření momentu únosnosti průřezu

$$M_d = \frac{f_d I_y}{z_{max}} = \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 15{,}15 \cdot 10^{-6}}{158{,}33 \cdot 10^{-3}} = 20{,}094 \cdot 10^3 = 20{,}094 kN$$

c) Určení maximální hodnoty síly F

Z hlediska zajištění bezpečnosti konstrukce musí být účinek zatížení menší nebo roven únosnosti konstrukce. Obojí máme v našem případě vyjádřeno pomocí ohybových momentů. Podmínku můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$M_{max} \leq M_d$$

Po dosazení dostaneme:

$$\frac{9}{5}F \leq 20{,}094 kN$$

Řešením získáme:

$$F \leq 11{,}16 kN$$

d) Průběh napětí po průřezu v místě maximálního ohybového momentu

Největší ohybový moment na nosníku je v bodě d a má hodnotu:

$$M_{max} = M_c = \frac{9}{5}F = 20{,}094 kNm$$

Napětí pro něj spočítáme v bodech 1,2 a 3 které odpovídají horním vláknům, styku stojiny a pásnice a dolním vláknům. Z-ové souřadnice těchto bodů dosazujeme do vztahu:

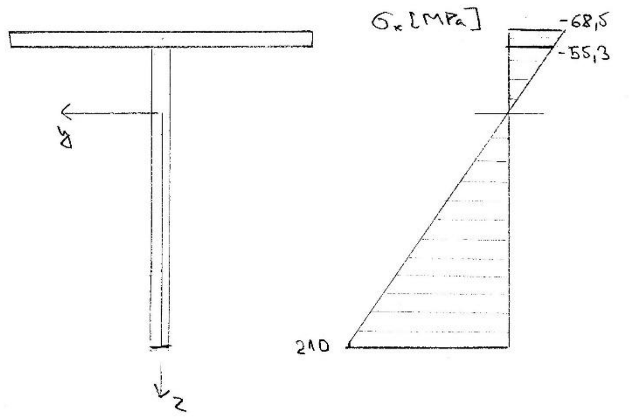
$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_{x,1} = \frac{20{,}094 \cdot 10^3 (-51{,}666 \cdot 10^{-3})}{15{,}15 \cdot 10^{-6}} = -68{,}5 \cdot 10^6 = -68{,}5 MPa$$

$$\sigma_{x,2} = \frac{20{,}094 \cdot 10^3 (-41{,}666 \cdot 10^{-3})}{15{,}15 \cdot 10^{-6}} = -55{,}3 \cdot 10^6 = -55{,}3 MPa$$

$$\sigma_{x,3} = \frac{20{,}094 \cdot 10^3 \cdot 158{,}333 \cdot 10^{-3})}{15{,}15 \cdot 10^{-6}} = 210 \cdot 10^6 = 210MPa$$

Hodnoty zakreslíme do grafu. Víme, že napětí v těžišti je rovno nule.



e) Průběh napětí po průřezu v místě maximální posouvající síly

Největší posouvající síla na nosníku je v úseku a-c a má hodnotu:

$$V_{max} = V_a = \frac{7}{5}F = 15{,}629kN$$

Na všech okrajích průřezu je napětí nulové. Na pásnici lineárně narůstá směrem ke svislé ose prutu. Budeme určovat hodnotu ve svislém řezu, těsně před stojinou (řez 1). Na stojině má smykové napětí parabolický průběh. Určíme hodnotu v řezu na styku s pásnicí (řez 2) a dále v těžišti (řez 3), kde očekáváme extrémní hodnotu.

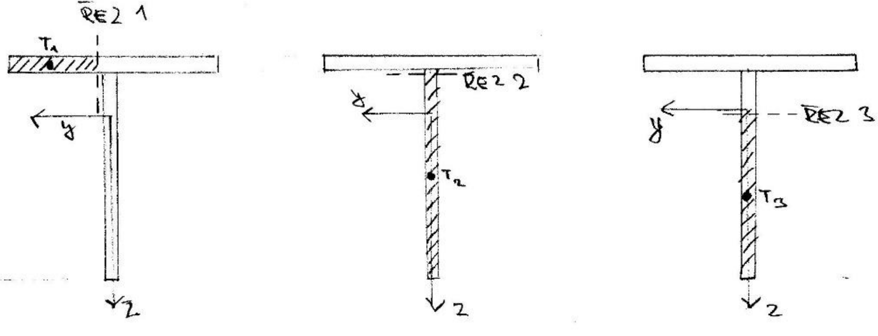
Pro velikost napětí použijeme vztah pro tenkostěnné průřezy:

$$\tau = \frac{V_z \overline{S_y}}{I_y t}$$

Posouvající síla V_z a Moment setrvačnosti průřezu I_y jsou pro celý průřez konstantní.

Za tloušťku t budeme dosazovat tloušťku řezu, tzn. Pro řez 1 tloušťku pásnice a pro řezy 2 a 3 tloušťku stojiny.

$\overline{S_y}$ je statický moment plochy dolní části průřezu odříznuté myšleným řezem vedeným ve směru tloušťky dané části. Ten je číselně shodný se statickým momentem zbývající horní části, pouze má opačné znaménko. Pokud je jednodušší počítat ho pro horní část, je to možné, jenom je třeba dát výsledek do absolutní hodnoty. Statický moment plochy počítáme jako plochu oddělenou řezem krát z-ová souřadnice této plochy. Uvažované plochy pro výpočet jednotlivých $\overline{S_y}$ jsou vyšrafovány na obrázku.



$\overline{S_{y,1}} = |0{,}096 \cdot 0{,}01 \cdot (-0{,}046666)| = 4{,}48 \cdot 10^{-5} m^3$

$\overline{S_{y,2}} = 0{,}2 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}058333 = 9{,}333 \cdot 10^{-5} m^3$

$\overline{S_{y,3}} = 0{,}15833 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}15833/2 = 1{,}003 \cdot 10^{-4} m^3$

Nyní můžeme spočítat napětí v jednotlivých řezech

$$\tau_1 = \frac{15{,}629 \cdot 10^3 \cdot 44{,}8 \cdot 10^{-6}}{15{,}15 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 4{,}622 \cdot 10^6 = 4{,}622 MPa$$

$$\tau_2 = \frac{15{,}629 \cdot 10^3 \cdot 93{,}33 \cdot 10^{-6}}{15{,}15 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 12{,}035 \cdot 10^6 = 12{,}035 MPa$$

$$\tau_3 = \frac{15{,}629 \cdot 10^3 \cdot 100{,}3 \cdot 10^{-6}}{15{,}15 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 12{,}934 \cdot 10^6 = 12{,}934 MPa$$

Nyní můžeme průběhy napětí vykreslit. Na svislé části jde smykový tok ve směru posouvající síly, tedy shora dolů. Na vodorovné pásnici se napětí sbíhá směrem k ose průřezu tak, aby smykový tok mohl navazovat na smykový tok ve stojině.